

PRIME MISURE GEODETICHE E GRAVIMETRICHE NEL '700 E '800

PIETRO BROGLIA (*), LUIGI MUSSIO (**)

Nota presentata dal m.e. Bruno Bertotti
(Adunanza del 14 aprile 2011)

SUNTO. – Nel primo '800, a Milano all'Osservatorio di Brera (con Vienna e Praga, una delle tre istituzioni astronomiche dell'Impero austriaco,) è preparato un esperimento per misurare le perturbazioni gravitazionali sul moto di un pendolo semplice, valutando così la densità della terra. Fino ad allora, le ricerche in questo campo, condotte principalmente in Inghilterra (di cui si dà breve menzione), sono poche. Invece negli anni seguenti, un insieme di fattori, dipendenti in primis dalle mutate condizioni politiche, fa venir meno, su scala europea, la collaborazione scientifica nel cui ambito è effettuato l'esperimento gravimetrico. In Italia, i rilievi gravimetrici riprendono verso la fine dell'800 e proseguono nel '900, fino agli anni '60 (cui si fa cenno per concludere).

ABSTRACT. – At the beginning of the 19th century, the Observatory of Brera in Milan and the Observatories of Vienna and Prague were the three most important astronomic institutions of the Austrian empire. In the same period, in Milan, an experiment, concerning the measurement of the gravimetric perturbations on the simple pendulum movement, was prepared to evaluate the density of the earth. Indeed until that epoch, few researches in this field were performed only in England. Unfortunately after the positive conclusion of this first experiment, difficult political conditions caused the stop of the cooperation among European institutions and blocked also a possible continuation of these experiments at a European scale. In Italy, gravimetric surveying restarted at the end of the 19th century and it continued until the '60s of the 20th century. In the

(*) Osservatorio Astronomico di Brera – INAF, via Emilio Bianchi, 23807 Merate (Lecco), tel. +39.999.1123, fax +39.999.1160. E-mail: pietro.brogli@brera.inaf.it

(**) DIAR – Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, tel. +39.02.2399.6501, fax +39.02.2399.6530. E-mail: luigi.mussio@polimi.it

previous context (August 1825), a relevant step was the application, for the data treatment, of the least squares method, just four years after its issue in 1821.

1. GENERALITÀ

Il settecento italiano ed europeo è un secolo di profonde innovazioni; tuttavia in Italia è caratterizzato proprio dall'età delle riforme, dopo l'epoca della controriforma ed il lungo predominio spagnolo. Con questo spirito, si innovano le città e le campagne, e si dà avvio alle prime forme di manifattura. Proprio per questo, sono necessarie basi cartografiche adeguate, da qui i catasti metrici e le piante geometriche delle città. L'agrimensura ed il disegno cartografico esistono da tempo, ma investire del problema gli astronomi, come già accaduto altrove in Europa, fa sì che il rigore e la precisione, tipiche dell'astronomia, passi per mezzo della geodesia alla cartografia stessa. Dopodichè l'influenza positiva fa scuola ed una nuova branca del rilevamento si apre, grazie alla camera lucida (antesignana della fotogrammetria), con l'acquisizione di panorami e vedute di monumenti e manufatti.

Fondamento di questi rilievi sono le reti geodetiche, rilevate tramite triangolazioni, dove il dimensionamento è ottenuto con lo sviluppo di una base misurata. Un'osservazione, qui marginale, ma importante, constata la pressoché identica precisione con i rilevamenti attuali, al prezzo di lunghe operazioni di misura (ad esempio, addirittura un mese, per la misura di una base della lunghezza di circa dieci chilometri). Un'osservazione centrale, nell'ambito del presente lavoro, e comunque fondamentale, per l'accuratezza delle osservazioni e per gli avanzamenti scientifici delle conoscenze, nell'ambito della geodesia, è il riconoscimento dell'influenza del campo della gravità terrestre sulla maggior parte delle misure effettuate. A riguardo, fanno eccezione le misure di distanza e, all'epoca, le singole misure con le aste graduate, in quanto già la loro successione segue l'orizzontale, variabile punto a punto, così come variano le superfici equipotenziali.

La misura della gravità è, da sempre, un problema complesso, perché coinvolge insieme misure assolute e misure relative, dove oggi-giorno le seconde sono di più semplice esecuzione delle prime. Tuttavia all'epoca cui si fa riferimento, l'unico modo per avere misure attendibili sull'accelerazione di gravità e, di conseguenza, sui suoi funzionali che

intervengono nella correzione delle misure geodetiche, è il pendolo semplice. Infatti questo, noto il suo periodo d'oscillazione, collega l'accelerazione di gravità del sito, in modo direttamente proporzionale, alla lunghezza della sua asta. Dopodiché la determinazione della lunghezza dell'asta diventa un problema di confronto con differenti regoli di taratura, per poter tener conto anche della dilatazione termica. Per contro, un'informazione derivata, d'eminente valore scientifico, è relativa alla determinazione della densità media della terra.

Le suddette operazioni di taratura richiedono l'esecuzione di calcoli, per ricavare i parametri attesi delle costanti lineari della dilatazione termica, in funzione degli allungamenti misurati e delle temperature di riferimento. Ovviamente tutte le operazioni possono svolgersi per via empirica o semiempirica, ad esempio, facendo medie di dati originari, per poi passare ad altre medie dei quozienti tra coppie di dati corrispondenti. Tuttavia è noto che, in assenza di dati anomali (che solitamente nascondono errori grossolani), il metodo dei minimi quadrati fornisce stime corrette e di minima varianza dei parametri attesi. Questo metodo, noto e di uso comune oggi, è invece una novità del momento, all'epoca cui si fa riferimento. Pertanto il suo uso, nel contesto delle operazioni di taratura, dà al lavoro eseguito spiccate caratteristiche di innovazione ed originalità, come si addice ai lavori scientifici migliori.

2. L'ESPERIMENTO GRAVIMETRICO DEL CARLINI

All'inizio dell'800, il Governo del Regno d'Italia istituisce una Commissione, al fine di introdurre in Italia il nuovo sistema di pesi e misure, il sistema metrico decimale, dotandola di campioni di misura delle unità fondamentali del sistema. L'astronomo Barnaba Oriani, presidente della Commissione, della quale è membro Francesco Carlini, raccoglie quanto è utile conoscere sull'argomento nelle "Istruzioni sulle misure e sui pesi", un libro classico che, scrive un secolo dopo Giovanni Celoria, "ancor oggi si può leggere con profitto".¹ Nel 1810, la Commissione pro-

¹ A riguardo, l'appendice di questo lavoro cui si rimanda presenta l'uso del metodo dei minimi quadrati da parte del Carlini, in data 1825, appena quattro anni dopo la formulazione definitiva del metodo, ad opera di Carl Friedrich Gauss.

gramma di ripetere in Milano l'esperienza fatta a Parigi da Jean Borda per determinare la lunghezza del pendolo semplice² che batte il secondo di tempo medio, utilizzando i due esemplari del metro campione a sua disposizione. Il macchinista dell'Osservatorio di Brera Joseph Megele inizia la costruzione dell'apparato per eseguire l'esperimento.³

Sciolta la Commissione, Carlini rimane depositario dei campioni di misura. La costruzione dell'apparato gravimetrico, interrotta nel 1816 alla morte di Megele, è continuata dal suo successore Carlo Grindel, con l'attenta partecipazione di Carlini.⁴ Sono apportati perfezionamenti sia al pendolo per eliminare o ridurre le cause che possono perturbarne il moto, sia ai dispositivi ottici per misurare la sua lunghezza, per confronto con il metro campione, e determinarne il periodo di oscillazione.⁵ Numerose sono le misure ottenute via, via che sono apportati i perfezionamenti, tuttavia i risultati non sono mai pubblicati.⁶ Poco dopo, nel corso di un'operazione, voluta dai governi di

² L'esperienze eseguite con il pendolo semplice conducono ad un valore accurato della densità media terrestre ρ solo con misure appropriate. Infatti occorre misurare il suo periodo T e la sua lunghezza l , nonché distinguere tra accelerazione di gravità, ad una data distanza dal centro di una sfera, e tre correzioni, dovute allo schiacciamento polare, all'altezza sul livello del mare ed alle masse vicine. Solo con appropriate campagne di misura si possono valutare questi tre contributi aggiuntivi, sottrarli dal periodo osservato e risalire poi alla densità media della terra ρ . Questa è legata alla gravità corretta g dalla relazione: $g=4\pi G\rho R/3$, essendo G la costante universale di gravitazione.

³ La lunghezza l del pendolo (con periodo d'oscillazione T) è legata all'accelerazione di gravità g dalla relazione: $g=4\pi^2 l/T^2$, dove la gravità è ridotta al livello del mare e corretta per la componente della forza centrifuga, in funzione della latitudine del luogo.

⁴ Carlini: Osservazioni della lunghezza del pendolo semplice. Eff. Mil. 1824, App., p. 24.

⁵ Perfezionamenti sono altresì apportati anche all'apparato di Borda, per evitare ogni possibile accoppiamento meccanico tra il pendolo semplice ed il pendolo di confronto. Le oscillazioni dei due pendoli sono confrontate grazie ad un sistema ottico: un comparatore lineare per mezzo del quale è misurata la lunghezza del pendolo (senza doverlo rimuovere), rispetto al metro campione. Avendo Borda già dimostrato che l'accelerazione di gravità è la stessa per corpi di diversa densità, Carlini utilizza un solo peso – motore, cioè una piccola sferetta di platino, per rendere minimi gli effetti della spinta idrostatica dell'aria.

⁶ Celoria: Oriani – Commemorazione, letta il 12 novembre 1911, in Sesto San Giovanni.

Francia, Austria e Piemonte, per collegare le reti geodetiche dei loro paesi, Carlini effettua l'esperimento gravimetrico in una stazione sita su un alto monte ed ottiene una stima della densità media della terra, impresa condotta a termine, fino ad allora, da pochi studiosi.

All'inizio dell'800, su richiesta del Governo francese, in Italia è eseguita una triangolazione geodetica che si estende principalmente nel senso del parallelo da Rivoli, presso Torino, a Fiume.⁷ Negli stessi anni, conclusa, alla fine del '700 la misura dell'arco di meridiano tra Dunkerque e Formentera sulla cui lunghezza si basa la definizione del metro, il Governo di Francia promuove un'analoga operazione lungo lo stesso parallelo, con gli estremi a Bordeaux ed a Chambéry. Il congiungimento con la rete dell'Italia settentrionale permette la misura dell'arco di parallelo tra Atlantico e Adriatico. Pertanto è necessario eseguire una triangolazione sulle montagne che separano la Savoia dal Piemonte, allora nel Regno sardo, impresa fino allora ritenuta quasi impossibile, per l'effettiva difficoltà di stabilire e gestire punti di stazione sui ghiacciai delle Alpi.⁸

Allo scopo, è stabilita una rete di triangoli che si appoggia ad una base geodetica sita in Francia poiché, a torto, si ritiene non sicura la base, misurata mezzo secolo prima in Piemonte, con strumenti molto meno precisi. La parte astronomica dell'operazione volta a fornire la misura della latitudine, della longitudine e dell'azimut di alcuni triangoli della rete è affidata a Giovanni Antonio Amedeo Plana ed a Carlini.⁹ Alle determinazioni di longitudine, ottenute con la tecnica dell'accensione di fuochi, partecipano anche astronomi svizzeri, oltre ai colleghi italiani e francesi. L'operazione rende possibile il calcolo della lunghezza dell'arco di parallelo compreso tra Fiume e Bordeaux. L'elaborazione delle misure, ottenute dai due gruppi di ufficiali, è fatta

⁷ L'operazione, iniziata dagli astronomi di Brera e, tra essi, l'allora ventenne Carlini, estende la Carta del Milanese e del Mantovano alle regioni all'est dell'Adda, ma si rivela superiore alle loro forze ed è continuata e conclusa dagli ufficiali geografi francesi, nel 1811.

⁸ L'operazione è eseguita nel 1822 da due gruppi di ufficiali geografi austriaci e piemontesi che, operando separatamente, eseguono i rilievi. *Operations géodésiques exécutées en Italie par les Ingenieursgéographes français. Connaissance de Tems 1827, p. 385.*

⁹ Carlini osserva nelle stazioni istituite presso l'Ospizio del Moncenisio e sul Monte Colombier (nel Giura), e Plana a Torino.

dagli astronomi Carlini e Plana, ed il confronto tra le posizioni astronomiche e le corrispondenti geodetiche permette di migliorare la conoscenza dell'ellissoide osculatore per l'Europa.¹⁰

Carlini è indotto ad eseguire l'esperimento gravimetrico nel corso della campagna, oltre che dal comprensibile desiderio di metter a frutto il lungo lavoro di messa a punto dell'apparato pendolare, anche da altri motivi.¹¹ Già nella seconda metà del '700, un fisico di Torino esegue esperimenti con un pendolo semplice collocato a diverse quote su una montagna della Savoia. I valori ottenuti sembrano indicare un aumento della gravità con l'altezza;¹² tuttavia successive accurate indagini mostrano che si tratta di "una strana invenzione", come scrive Carlini. Inoltre durante i decenni successivi, quando la teoria newtoniana della gravitazione è universalmente accettata, nessuna misura gravimetrica è più eseguita sulle Alpi, al fine di ottenere dati sicuri riguardanti la forza attrattiva dei monti, ricavando poi da questi un valore della densità media della terra.

Questo è lo scopo dell'esperienza di Carlini, resa possibile dal fatto che la stazione sita sul Moncenisio, a 2000 metri di quota, è equipaggiata con strumenti dell'Osservatorio di Brera, come il pendolo a compensazione per conservare il tempo medio ottenuto osservando i passaggi stellari, orologio che con il pendolo semplice ed i dispositivi per la misura della sua lunghezza e del periodo di oscillazione costituiscono l'apparato gravimetrico messo a punto a Brera.¹³ Pertanto Carlini è in grado di partecipare a queste nuove ricerche ed inoltre può confrontare i suoi risulta-

¹⁰ Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen exécutées en Piémont et en Savoie par une commission composée d'officiers de l'état général major générale et d'astronomes piémontais et autrichiens. en 1821, 1822, 1823. A Milan de l'Imprimerie impériale et royale, 1825 (2 vol. + atlante).

¹¹ Operando in una stazione, sita su un alto monte, è possibile misurare l'influenza, sul moto pendolare, indotta dalla massa del monte e valutare così la densità media della terra. Tuttavia fino ad allora, pochi sono gli esperimenti analoghi e discordanti i risultati ottenuti.

¹² Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert, coautore della Encyclopedie, con la sua autorità sostiene la validità del risultato, alimentando così per qualche tempo la polemica tra newtoniani e cartesiani sulla legge che governa la forza di gravità.

¹³ Nel contempo, è iniziata in Francia una serie di misure gravimetriche lungo lo stesso parallelo, per opera di Jean-Baptiste Biot, misure che negli anni successivi il Biot estende alla Spagna e all'Italia, venendo a Milano nel 1824.

ti con i recenti ottenuti da Jean-Baptiste Biot a Bordeaux, in una stazione sita a livello del mare e di latitudine prossima a quella del Moncenisio.¹⁴ La differenza rispetto al valore ivi ottenuto, dovuta sia alla differente quota che all'effetto attrattivo della massa del Moncenisio, permette una stima della densità media della terra.

Le misure sono eseguite nell'estate del 1821. Essenziale allo scopo è la dettagliata conoscenza della massa del Moncenisio, a quell'epoca ancora del tutto carente. In assenza di una descrizione topografica, Carlini assimila il monte a un segmento di sfera. Riguardo poi alla sua composizione litologica secondo il geologo Hovace Bénédict Saussure il monte è formato principalmente da tre tipi di roccia. Carlini ne esamina molti campioni determinandone le densità ed ipotizza per le tre componenti eguale abbondanza e simile distribuzione nell'interno del monte. Dalla massa del Moncenisio stimata secondo tali assunzioni e dalla misura della gravità ottenuta con il suo apparato, Carlini valuta in 4.39 la densità media della terra. Carlini giudica il suo risultato "in gran parte ipotetico", riservandosi di correggerlo, non appena disponibile una migliore conoscenza della struttura geologica del monte.

Egli certamente conosce quale importanza le prospezioni geologiche ed i rilievi topografici hanno negli analoghi esperimenti condotti in Inghilterra. E' da notare che nella sua nota egli descrive dettagliatamente le numerose modifiche apportate all'apparecchio gravimetrico, verosimilmente per sottolineare come il disaccordo tra i suoi risultati rispetto ad altre determinazioni, in particolare al valore ricavato in laboratorio nel 1798 da Henry Cavendish, non è imputabile a imperfezioni strumentali.¹⁵ Oltre alla mancanza di una più attendibile valutazione della massa del Moncenisio, forse un altro motivo sconsiglia Carlini dal

¹⁴ Biot: *Traité élémentaire d'Astronomie physique*, Paris 1844, vol II (pag. 460-502). A p. 465 si legge: ...je partis, vers la fin de 1824, avec mon fils, E. Biot, pour l'Italie et l'Espagne. Nous avons d'abord pour but principal de compléter les mesures du pendul sur le grand arc de parallèle qui s'étend aujourd'hui de Bordeaux at Fiume et que l'on peut espérer de voir, dans quelques années, se prolonger jusqu'à la mer Noire. – A Milano i Biot determino la lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo in 993.5008 mm; valore che nel vuoto e ridotto a livello del mare risulta: 993.547642 mm.

¹⁵ A riguardo, scrive Giovanni Virginio Schiaparelli, per due anni suo collaboratore: (Carlini) "ebbe molta inclinazione alle operazioni meccaniche, in cui trovava sollievo alla mente stanca dalle continue e profonde meditazioni" (da: *Notizie sulla vita e sugli studi di Francesco Carlini in Istituto Lombardo*, tornata del 18 dicembre 1862).

riconsiderare in seguito la questione: la consapevolezza, acquisita in quegli anni, sull'esistenza di forti anomalie gravitazionali nella zona dell'esperimento, anomalie che inficiano l'ipotesi allora da tutti accettata, sulla uniformità della struttura della crosta terrestre.¹⁶

Già a meta '700, su suggerimento di Ruggero Boscovich, Giovanni Battista Beccaria intraprende la misura dell'arco di meridiano compreso tra Andrate e Mondovì. Nel "Gradus Taurinensis" pubblicato nel 1764, egli richiama l'attenzione sulla discordanza di 34" tra le latitudini astronomiche e le latitudini geodetiche misurate nelle due località. Le prime, come noto, sono riferite alle verticali dei luoghi e sono visualizzate dalla direzione del filo a piombo che nella pratica astronomica individua lo zenit strumentale. Rispetto a questo sono misurate le distanze zenitali delle stelle ed è ricavata la latitudine di un luogo. A causa della presenza del monte Rosa, sito a nord di Andrate, e delle Alpi Marittime, poste a sud di Mondovì, le verticali nelle due località sono deviate in direzioni opposte rispetto alle corrispondenti normali all'ellissoide di riferimento.¹⁷

L'anno successivo, paragonando la latitudine astronomica di Milano e quella da lui ottenuta a Parma con i corrispondenti valori ricavati dalle triangolazioni, Carlini trova una differenza di oltre 20" tra le distanze dei paralleli delle due città ottenute con i due metodi succitati.¹⁸ In questo caso, l'effetto non è imputabile alla vicinanza di montagne, ben lontane dalle due città. Si deve pertanto supporre l'esistenza di anomalie nella densità della crosta terrestre nella zona pia-

¹⁶ Le mutate condizioni politiche causano un'interruzione nelle operazioni geodetiche, in quanto, a seguito dei moti del '21, sta allora mutando l'atteggiamento dell'amministrazione austriaca nei confronti delle istituzioni italiane. In particolare, in quell'anno, Fabrizio Ottaviano Mossoti, astronomo a Brera fugge per non essere arrestato dalla polizia austriaca.

¹⁷ La discordanza trovata da Beccaria è attribuita alla scarsa qualità degli strumenti utilizzati, il che induce gli ingegneri geografi francesi a riferire la triangolazione del 1821 alla base sita in Francia. Nello stesso anno, disponendo di strumenti molto più perfezionati di quelli di Beccaria, Carlini ripete la misura dell'arco suddetto e trova una differenza di ben 48" tra le latitudini determinate con i due metodi. Pertanto a Beccaria va riconosciuto il merito di aver per primo evidenziato, otto anni prima dell'inglese Maskelyne, l'esistenza di discordanze tra le direzioni delle verticali astronomiche e le verticali ellissoidiche, ricavate dalle triangolazioni.

¹⁸ Carlini: Differenza tra le latitudini tra Milano e Parma. Eff. Mil. 1823, p. 63.

neggiante, compresa tra le due località, ed è possibile che la stessa causa influenzi anche i risultati ottenuti al Moncenisio.¹⁹ L'esistenza di forti anomalie gravimetriche nel centro-nord d'Italia ha un'ulteriore conferma qualche anno dopo, quando gli ingegneri geografi francesi elaborano tutti i dati raccolti nel corso delle operazioni, come si legge nella loro relazione, a conclusione del confronto delle latitudini derivate dalle triangolazioni con quelle osservate astronomicamente.²⁰

Nel fondo Carlini dell'Archivio di Brera è presente un voluminoso incartamento riguardante l'esperimento gravimetrico,²¹ invece la strumentazione è solo in parte conservata. Concluse le operazioni nella Savoia e nel Giura, il circolo meridiano portatile, costruito da Carlo Grindel, è acquisito dal Gabinetto fisico di Pavia.²² Invece il pendolo a tempo medio, opera di Megele, utilizzato al Moncenisio, si trova nell'Esposizione di Brera. Ben poco è rimasto invece del pendolo semplice e curiose sono le vicende di una sua componente. Per diminuire la spinta idrostatica dell'aria sul peso motore del pendolo e la resistenza al suo movimento Carlini sceglie come peso motore una sferetta di platino, il metallo di maggior densità. La sferetta è acquisita a Londra grazie all'interessamento di Wollaston, l'inventore della

¹⁹ Di questo fatto, è consapevole Carlini; infatti tra le sue carte, conservate a Brera (C 273, fasc. 2), si legge, in un appunto di sua mano, che "le principali cagioni delle irregolarità del pendolo sono le differenze nella densità degli strati superficiali del globo e delle elevazioni o depressioni del livello del mare. La densità media della terra è stata trovata da:

| | |
|----------------|--------|
| Cavendish | 5.48 |
| Maskeline | 4.56 |
| Playfair e Web | 4.87 |
| Carlini | 4.38 |
| medio | 4.83". |

²⁰ "Déterminer expérimentalement le nombre. de ces centres (di attrazione anomala), les limites de leur actions, etc., est un probleme curieux et tres digne d'exercer la sagacite des habiles astronomes de Milan, de Torin, de Padoue et de Rome": Opérations géodésiques executées en Italie par les Ingenieurs-géographes francais. Connaissance de Tems del 1827, p. 385 – Puissant: Calcoli relativi anche a Milano per le differenze tra le posizioni dedotte da misure astronomiche e da triangolazioni geodetiche. Connaissance de Tems del 1828, p. 224.

²¹ Archivio storico Brera, C 273, C 274.

²² Biblioteca Italiana, Tomo LXXIV p. 456, 1834.

tecnica di fusione del platino, e del conte d'Aglié, ambasciatore di S. M. Sarda a Londra.²³

Questi scrive a Plana, direttore della Specola di Torino, come... “il globetto di platino sia riuscito conforme al suo desiderio e non avrei mai sospettato che fosse una rarità, perchè ne ho inteso fare delle ammirazioni da alcuni scienziati di questo paese, e mi fu detto che il signor Pond stesso (John Pond, successore di Nevil Maskelyne alla direzione di Greenwich, rinnova la strumentazione dell'osservatorio: fondamentale il suo contributo nella determinazione delle parallassi stellari) aveva da lungo tempo e invano cercato di averne uno simile”. Per circa un secolo la sferetta, del peso di 302 gr e diametro di 31 mm, è conservata tra i cimeli della Specola milanese. Nel 1922, il direttore Emilio Bianchi la aliena impiegando la somma realizzata, Lire 15.000, per acquistare uno spettrografo Zeiss, al fine di avviare moderne ricerche di astrofisica.²⁴ Attualmente tra i cimeli del pendolo semplice di Carlini, rimane solo il modello in avorio della sferetta.

3. I PRIMI ESPERIMENTI GRAVIMETRICI IN INGHILTERRA

Le ricerche sperimentali, riguardanti la forza di gravità e la misura della densità media della terra, hanno inizio in Inghilterra, anche se già Giovanni Battista Beccaria misura l'influenza della forza attrattiva dei monti sulla direzione della verticale, come ipotizzato da Boscovich. Nella seconda metà del '700, la Royal Society sostiene la proposta avanzata da Maskelyne, direttore dell'Osservatorio di Greenwich, di eseguire un esperimento al fine di dimostrare che la forza, agente tra i corpi celesti, è attiva anche sulla terra. Grazie all'azione rinnovatrice nelle misure astronomiche, dovuta a James Bradley (cui si deve la scoperta della nutazione dell'asse terrestre e della aberrazione della luce, azione resa possibile da costruttori di strumenti quali Jonathan Sisson e Jesse Ramsden), si raggiunge un più elevato standard nella precisione delle misure astronomiche (a riguardo, un'illustrazione in *Fig. 1*).

Nella spedizione all'isola di Sant'Elena, promossa dalla Royal

²³ Archivio storico di Brera, C 110. Copia della lettera da Londra in data 11.8.1819 fu trasmessa da Plana a Carlini.

²⁴ *Giornale di Astronomia*, vol. 33, n.4, pp. 16-26, 2007.

Society anche su insistenze di Boscovich,²⁵ per determinare la parallasse solare con l'osservazione del passaggio di Venere sul sole, Maskelyne utilizza strumenti costruiti da Sisson e Ramsden. Con gli stessi apparecchi, egli ritiene possibile porre in evidenza una perturbazione nella direzione della verticale di un luogo sito nelle vicinanze di una grande massa come quella di un monte. Infatti le latitudini astronomiche misurate in due luoghi posti sullo stesso meridiano e siti uno a sud e l'altro a nord della base di un monte, sono influenzate in senso opposto. Al contrario, le direzioni delle normali all'ellissoide terrestre di riferimento, calcolate negli stessi punti dalle posizioni e misurate mediante triangolazioni geodetiche, non risentono della presenza della montagna ed il loro confronto con le direzioni delle normali astronomiche pone in evidenza l'effetto.

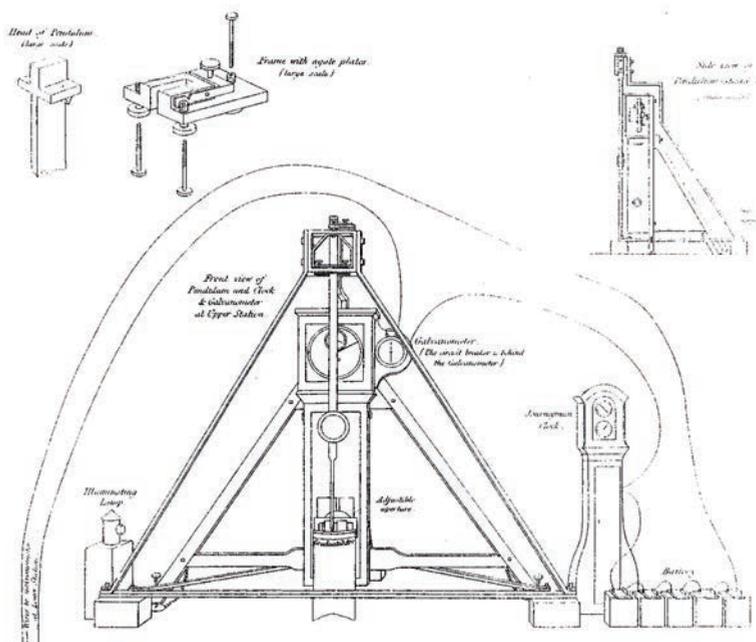


Fig. 1 – Strumentazione in uso nelle prime campagne gravimetriche.

²⁵ Philosophical transactions, 51, p. 865.

Il monte Schehallien, sito nella Scozia, appare adatto allo scopo, sia per la forma abbastanza regolare, sia per la lontananza da altre montagne. Maskelyne istituisce alla base del monte due stazioni site sullo stesso meridiano una a nord e l'altra a sud dello stesso e ne determina la latitudine osservando le stesse stelle, oltre una trentina, con un Settore zenitale di Sisson di dieci piedi di raggio. Istituita poi nel pressi del monte una base geodetica esegue una triangolazione, utilizzando un teodolite di Ramsden di 9", determina le posizioni delle due stazioni e calcola le direzioni delle normali all'ellissoide di riferimento. La differenza tra le latitudini astronomiche dei due luoghi risulta di 54.6", mentre dalle misure geodetiche ricava il valore di 42.9". La differenza di ben 11.7" tra i due valori è la prova dell'effetto perturbatore del monte sulla direzione del filo a piombo.²⁶

L'esperimento di Maskelyne è eseguito nel 1774. Tre anni più tardi, il geologo James Hutton, in base alle caratteristiche litologiche e geometriche dello Schehallien, valuta la sua densità media pari a 2.5 volte quella dell'acqua e calcola la densità media terrestre in 4.482.²⁷ Dopodichè all'inizio dell'800, nel corso di un'operazione di più ampio respiro della Mineralogical Survey, John Playfair, geologo e allievo di James Hutton, ottiene un'accurata descrizione dello Schehallien. Il monte risulta composto sostanzialmente di tre tipi diversi di roccia, di densità 2.64, 2.83 e 2.77. Playfair suddivide idealmente il monte in 960 sezioni verticali. Supponendo omogenea ogni colonna, con una densità pari a quella delle rocce superficiali, valuta il contributo di ciascuna all'effetto sulla direzione della verticale e, con i risultati ottenuti da Maskelyne, calcola in 4-559 la densità media della terra.²⁸

²⁶ Presentando i risultati alla Royal Society Maskelyne afferma "of consequence they proved the general diffusion of gravity through terrestrial substances, and offered data for determining the medium density of the earth, compared with that of bodies at its surface" Maskelyne si augura poi che le dimensioni e la figura del monte siano determinate con maggior precisione e che la sua densità media sia valutata mediante propezioni geologiche, in modo da ottenere un sicuro valore per la massa della terra – Maskelyne: An account of observations made on Schehallien for finding its attraction. Phil. Trans. of R.A.S. vol. 65, pp. 500-542, 1775.

²⁷ Hutton: Phil. Trans. vol. 68, p. 689, 1778.

²⁸ Playfair: Account of Lithological Survey of Schehallien, made in order to determine the specific Gravity of the Rocks which compose that mountain. Phil. Trans. of R.A.S. for 1811, pp. 347-377 (a p. 356 si trova un riferimento indiretto al lavoro di Hutton).

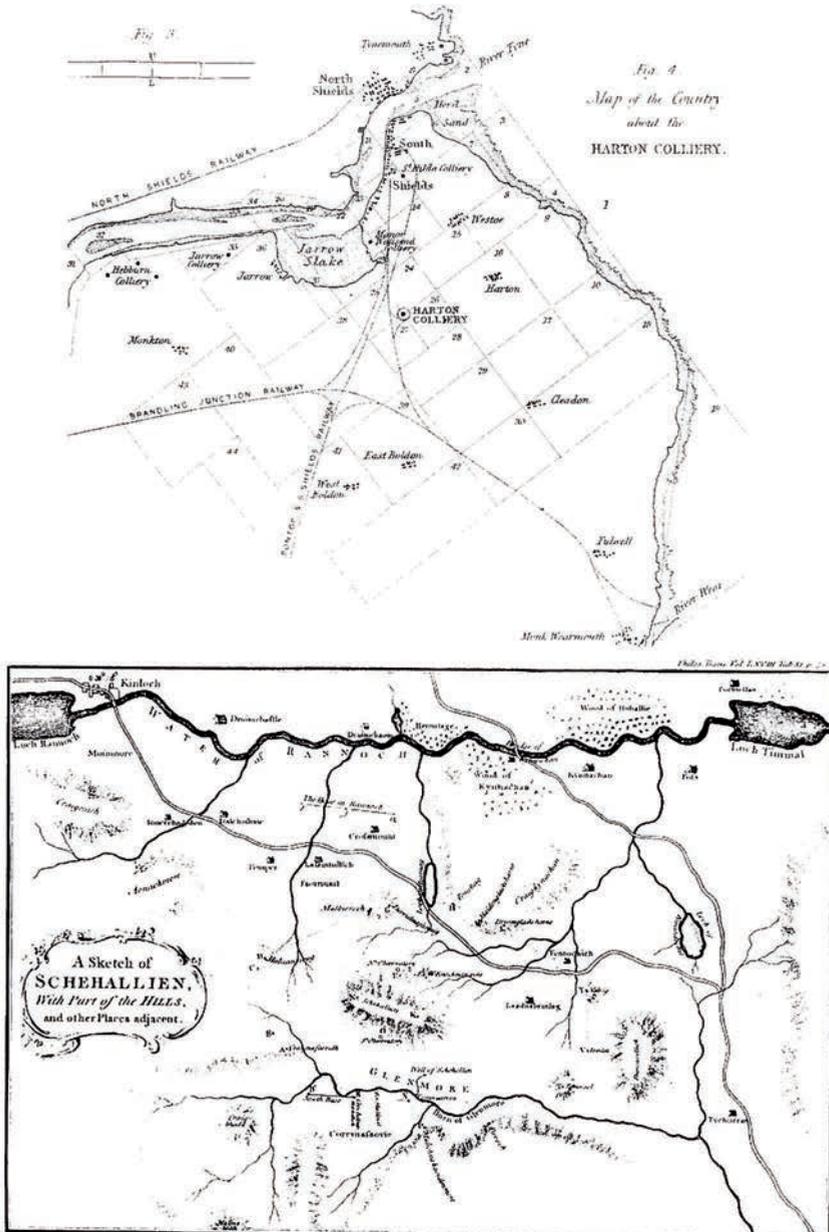
Negli stessi anni, Henry Cavendish ottiene in laboratorio un nuovo valore (5.48) della densità media terrestre con la bilancia di torsione.²⁹ Non ritenendo attendibile quel valore, George Biddle Airy progetta un nuovo esperimento in cui è aggirata la difficoltà dovuta alla non sicura conoscenza della massa perturbante, come nell'esperimento allo Shehallion, operando all'interno di un pozzo di una miniera. Una diretta conoscenza degli strati che la compongono fornisce infatti un più attendibile valore della massa agente sul moto del pendolo posto al fondo di una miniera e poi alla sua superficie. Alla meta dell'800, avendo operato in un pozzo profondo 1256 piedi della miniera di carbone di Harton, Airy³⁰ presenta un'ampia relazione del suo esperimento gravimetrico, riuscito nel 1854, dopo due precedenti infruttuosi tentativi fatti nel 1826 e nel 1828.³¹

Le *Figg. 2 e 3* presentano due mappe delle zone dei primi rilievi gravimetrici in Gran Bretagna; le successive *Figg. 4, 5 e 6* due profili di anomalie di gravità lungo l'Arco Alpino (da Mantova a Monaco di Baviera e da Graz a Vienna) e carta delle anomalie di gravità nel Mar Adriatico centro-settentrionale.

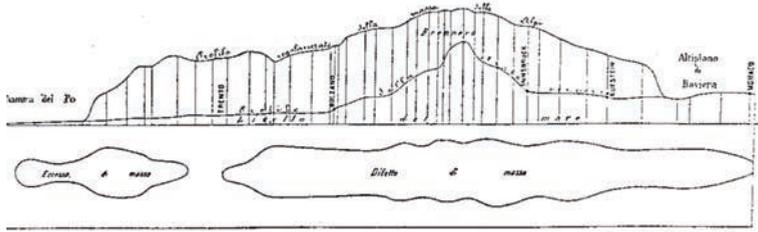
²⁹ A riguardo, Schiaparelli scrive, commemorando Carlini: "Sul Moncenisio determinò la lunghezza del pendolo semplice a secondi, all'altezza di circa mille tese sopra il livello del mare; da cui trasse il numero 4.39 per la densità della terra, alquanto minore di quelli dedotti per altra via da Cavendish, Reich, Bally ed Airy" (valore molto discordante rispetto all'attuale valore della densità media della terra, pari a 5.5134 gr/cm^3 , con un'incertezza pari a ± 0.0005) – Con l'eccezione di quello di Cavendish che opera con la bilancia di torsione (ovvero con un metodo di misura del tutto differente), tutti gli altri valori sottostimano il valore della densità media terrestre, prendendo in considerazione solo le masse della crosta terrestre, notevolmente più leggere di quelle interne. – Schiaparelli: Sulle anomalie della gravità. Riv. Geografica It. anno III, 1896.

³⁰ Airy si occupa anche di geofisica, proponendo che le catene montuose si comportino come blocchi di diverso spessore galleggianti in equilibrio isostatico in un mantello fluido più denso. In tal modo, egli dà una spiegazione delle anomalie gravitazionali osservate sull'Himalaya.

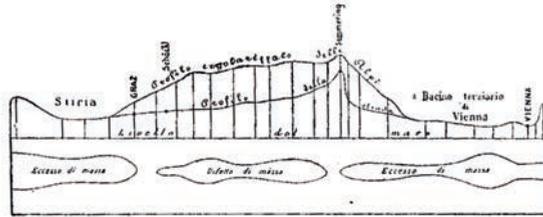
³¹ Airy: Phil. Trans. of R.A.S. vol. 146, pp. 297-355, 1856.



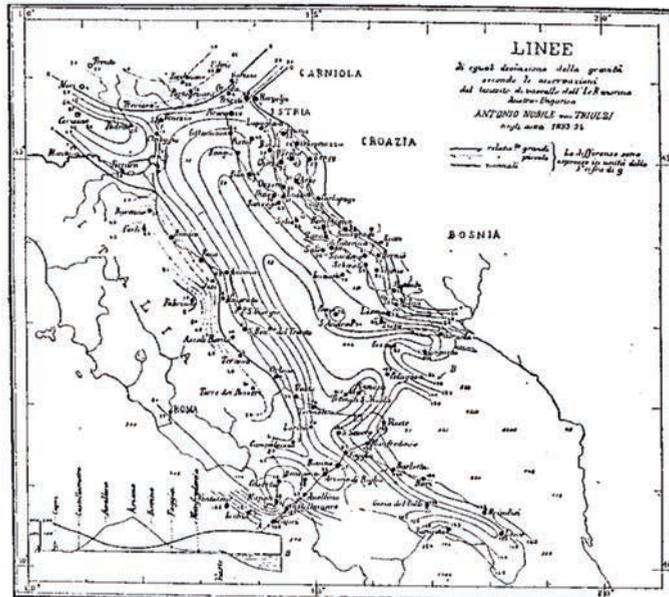
Figg. 2, 3 – Mappede delle zone dei primi rilievi gravimetrici in Gran Bretagna.



Anomalie della gravità lungo la via da Mantova a Monaco attraverso le Alpi osservate col pendolo da R. von Stern



Anomalie della gravità lungo la via da Graz a Vienna attraverso le Alpi, osservate col pendolo da R. von Stern



Figg. 4, 5, 6 – Profili di anomalie di gravità lungo l'Arco Alpino e carta delle anomalie nel Mar Adriatico.

4. SUCCESSIVI RILIEVI GRAVIMETRICI IN ITALIA

I rilievi gravimetrici, in Italia, continuano anche nella seconda metà dell'800, con minore frequenza, ma maggiore accuratezza, data la maggiore precisione degli strumenti allora a disposizione, come presentato in una nota dello Schiaparelli.³² Tra queste, merita menzione la misura della deviazione della verticale, ad opera del prof. Ignazio Porro e del dr. Vincenzo Reina, nel 1885, nella sua componente trasversale (cioè diretta nel senso dei paralleli), tra la Specola di Milano e quella di Torino, perché “non è tutto dovuto all'attrazione delle montagne, ma potrebbe in parte essere attribuito a distribuzioni molto anormali della densità sotterranea nei terreni della valle Padana”.³³ Una misura di gravità assoluta è invece eseguita dal prof. Giuseppe Lorenzoni, Direttore della Specola di Padova, nel 1893, per conto della Commissione Geodetica Italiana.³⁴

Negli stessi anni 1887-94, una campagna, su vasta scala, dalla Danimarca all'Italia settentrionale è compiuta dalla Marina austriaca.³⁵ La stessa marina austriaca continua poi i rilievi nel mar Adriatico centro-settentrionale, negli anni 1892-94.³⁶ Le sopraccitate *Figg. 4, 5 e 6* mostrano due profili di anomalie di gravità lungo l'Arco Alpino, ottenute nella prima delle due campagne, e la carta delle anomalie di gravità nel Mar Adriatico centro-settentrionale, ottenute nella seconda campagna. I rilievi gravimetrici hanno poi una forte ripresa nel primo dopoguerra, con la misura di alcune traverse, e maggiormente nel secondo, con vere e proprie campagne gravimetriche (un esempio in *Fig. 7*). Dopodichè tenuto conto di densità medie della crosta ter-

³² G.V. Schiaparelli: Sulle anomalie della gravità. Discorso letto alla Società di Scienze naturali di Milano, il 1° marzo 1896.

³³ A riguardo, è oggi ben nota, da rilevati geofisici profondi, la presenza del cosiddetto corpo d'Ivrea la cui densità è superiore a quella media della crosta terrestre.

³⁴ G. Lorenzoni: Determinazione della gravità relativa a Padova, Milano e Roma fatta nell'autunno 1893 mediante l'apparato pendolare di Sterneck. Atti del R. Ist. Veneto, Tomo V, Serie VIII, 1893.

³⁵ Von Sterneck: Die Schwerkraft in den Alpen. Mitteilungen, vol XI, Ist. Geografico Militare di Vienna.

³⁶ Relative Schwerbestimmungen durch Pendelbeobachtungen, ausgeführt durch die K.K. Kriegs-marine in der Jahren, 1892-94. Ministero Austriaco della Guerra e marina,, Vienna, 1895.

restre (come mostrato in *Fig. 8*), si è provveduto al calcolo delle anomalie di Bouguer (un esempio è mostrato in *Fig. 9* e la mappa delle stesse riportata in *Fig. 10*).

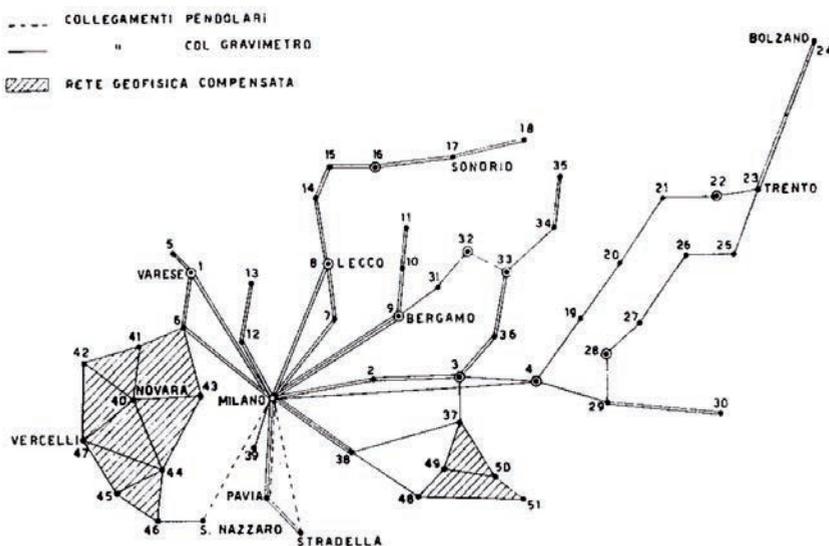
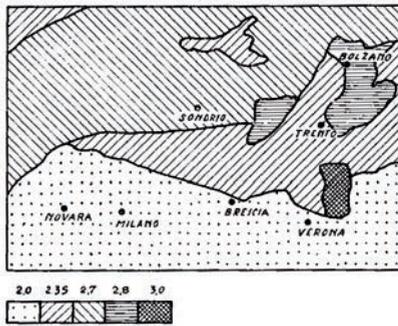


Fig. 7 – Una campagna gravimetrica nella pianura padana centrale, nelle Prealpi ed Alpi Centrali.

Ulteriori campagne estendono i rilievi anche all'interno di tutta l'area alpina (come mostrato dal grafico della rete gravimetrica di *Fig. 11*), fino ai confini nazionali per collegarle alle reti degli stati confinanti (nelle *Figg. 12* e *13* sono illustrate due monografie), permettendo un'estensione anche del calcolo delle anomalie di Bouguer a tutta l'area in esame, come riporta la mappa di *Fig. 14*. A riguardo, si ricorda che le anomalie Bouguer, a loro volta, corrette per i contributi delle masse topografiche, sono necessarie per il calcolo del geoide gravimetrico i cui primi calcoli in Italia (affiancati a quelli più speditivi, ma meno precisi, del geoide astro-geodetico) risalgono agli inizi degli anni '80 del 900 e sono terminati al volgere del millennio. Attualmente il geoide italiano ha una precisione media di qualche centimetro, con un errore di stima globale non superiore a pochi decimetri.



- I) - Quaternario in genere, alluvioni fluviali antiche e recenti, depositi di litorale e lacustri, morenico
densità media = 2,0
- II) - Calcari, calcari marnosi, complessi conglomeratico-arenaceo-calcareo-scisti
densità media = 2,3₆
- III) - Graniti, scisti cristallini in genere (filladi, gneiss, micascisti)
densità media = 2,7
- IV) - Porfidi in generale, porfiriti, dioriti
densità media = 2,8
- V) - Basalti, ecc.
densità media = 3,0.

Fig. 8 - Carta delle densità medie della crosta terrestre desunta da rilievi geologici.

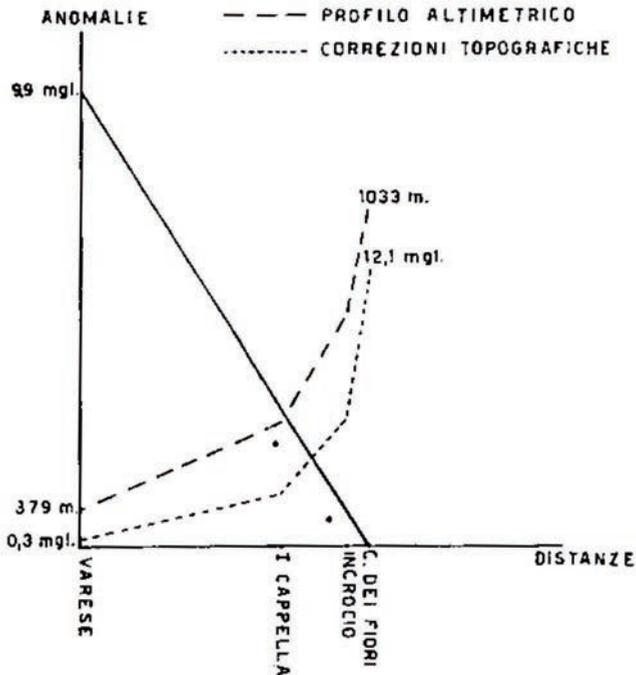


Fig. 9 - Calcolo delle anomalie di Bouguer.

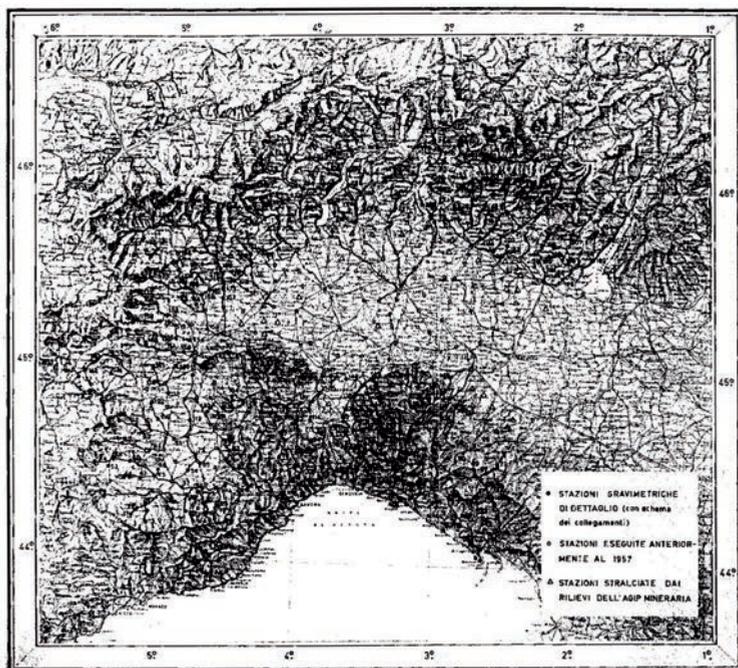


Fig. 11 – Estensione delle campagne gravimetriche alle zone alpine centro-occidentali.³⁸

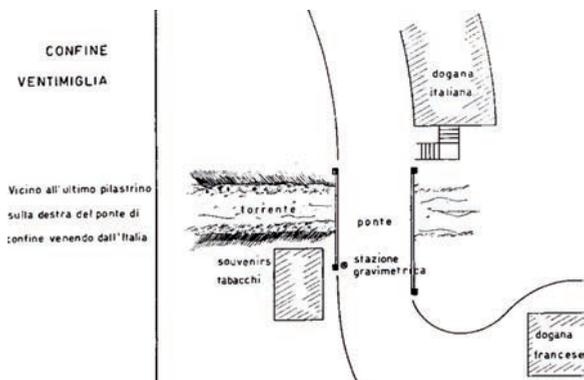


Fig. 12 – Un esempio di monografia di un caposaldo gravimetrico.

³⁸ Giuseppe Inghilleri: Completamento del rilievo gravimetrico nell'Italia nord occidentale. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, anno XVIII, n. 3, 1959.

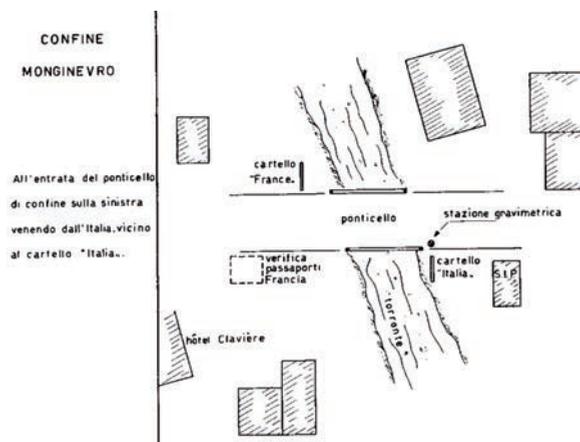


Fig. 13 – Un esempio di monografia di un caposaldo gravimetrico.

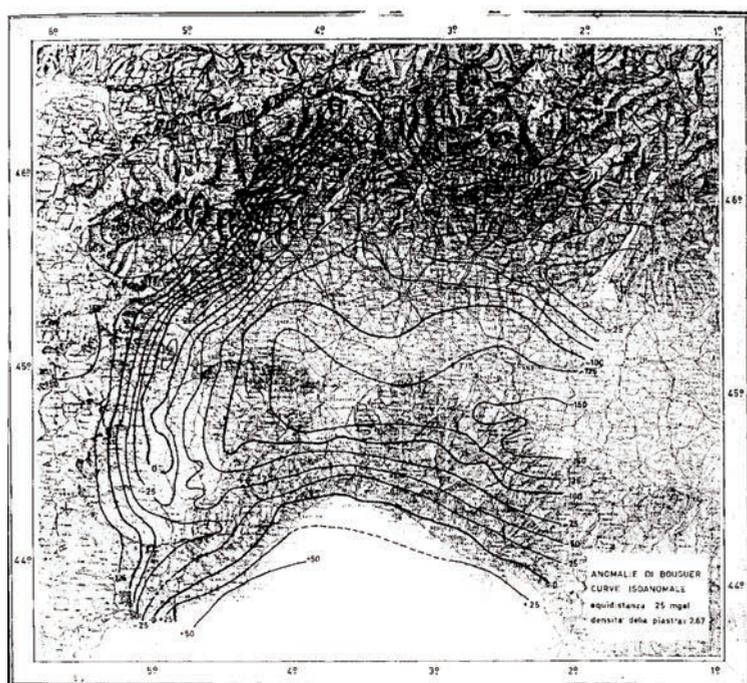


Fig. 14 – Mappa delle anomalie di Bouguer estesa alle zone alpine centro-occidentali.

5. APPENDICE – UNA DELLE PRIME APPLICAZIONI DEI MINIMI QUADRATI A MILANO

Nel 1825, ad appena quattro anni dalla definitiva formulazione del metodo dei minimi quadrati, ad opera di Gauss,³⁹ il Carlini applica questo metodo, per il calcolo di una regressione lineare, allo scopo di eseguire la taratura dell'asta di un pendolo, confrontando tra loro i metalli o le leghe: ottone, ferro ed acciaio, con un metro campione.⁴⁰ La tabella di *Fig. A.1*, riporta con la grafia autografa del Carlini, innanzitutto la data dello scritto, poi lo svolgimento completo (facente uso del passaggio ai logaritmi e viceversa per eseguire le moltiplicazioni e le divisioni) del calcolo di un sistema di due equazioni in due incognite.⁴¹

Non datato, ma verosimilmente coevo, in quanto trovato nello stesso faldone, nello stesso incartamento contenuto in esso, ed addirittura negli stessi cartigli, raccolti insieme, è il calcolo di tutta la regressione, eseguita per la suddetta taratura, come mostrato nelle tabelle delle *Figg. A.2, A.3 e A.4*. Il primo passaggio esegue il calcolo delle medie, per gruppo d'osservazioni (temperature rilevate e dilata-

³⁹ Il metodo dei minimi quadrati è presentato da Legendre, nel 1805 (che chiama il metodo: *moindres carrés*, da cui il nome attuale: minimi quadrati), e da Gauss, nel 1809, sulla base di un suo manoscritto, del 1795, e sulla scorta di alcuni tentativi infruttuosi di Eulero. Nel 1821, Gauss presenta alcune estensioni del metodo dei minimi quadrati che lo formalizzano, così come è attualmente conosciuto.

⁴⁰ L'esperimento al Moncenisio è eseguito nel 1822. Carlini ritiene che l'effetto dell'attrazione della montagna provochi una differenza di $210 \mu m$, nella lunghezza del pendolo che dà il secondo di tempo solare medio, rispetto ai $993.5 mm$ misurati da Biot a livello del mare, a Bordeaux, come si legge nella sua nota, pubblicata nel 1824. Non potendo confrontare la lunghezza del pendolo direttamente con i campioni del metro di Brera, Carlini costruisce un campione secondario, con tre metalli diversi le cui dilatazioni, in funzione della temperatura, determina per confronto con ben quattro campioni del metro (due di Brera, un terzo del Moscati ed uno della Specola di Torino). In seguito, nel 1825, il Carlini rielabora queste misure applicando il metodo dei minimi quadrati, allora innovativo.

⁴¹ L'appunto, confrontato con le tabelle, presentate nell'immediato prosieguo, sembra quasi un esercizio preliminare, per impraticarsi del nuovo metodo, ma la data e l'autorevolezza del computante danno comunque altissimo rilievo alla sua presentazione. Infatti ancora una volta, merita di essere sottolineata la modernità, per l'epoca, e la completezza scientifica delle ricerche svolte dal Carlini.

zioni termiche dell'ottone, del ferro e dell'acciaio, rispetto al metro campione), per poter poi scrivere, immediatamente sotto, le equazioni della regressione lineare sui valori medi, rispetto alla temperatura osservata.

10 Agosto 1825, Ottone) w.I

| a | b | la | lb | lab | ab | a ² |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|----------------|
| 11,40 | 0,2277 | 0,0569 | 0,3524 | 0,4143 | 2,596 | 129,0 |
| 10,90 | 0,2206 | 0,0374 | 0,3435 | 0,3409 | 2,404 | 118,8 |
| 22,90 | 0,5390 | 1,4450 | 0,7474 | 1,1930 | 15,596 | 778,4 |
| 28,85 | 0,5778 | 1,4801 | 0,7818 | 1,2719 | 16,669 | 832,3 |
| 33,45 | 0,6838 | 1,5244 | 0,8349 | 1,3593 | 22,473 | 1118,9 |
| 32,75 | 0,6530 | 1,5152 | 0,8149 | 1,3501 | 21,385 | 1072,6 |
| 12,20 | 0,2223 | 1,0464 | 0,3408 | 0,4332 | 2,711 | 148,8 |
| 12,15 | 0,2184 | 1,0846 | 0,3332 | 0,4178 | 2,617 | 147,6 |
| Σ 169,60 | 3,5396 | | | | 86,851 | 4347,4 |

| |
|------------------------------|
| $4x + 169,60y = 3,3596$ |
| $169,60x + 4347,4y = 86,851$ |
| $x + 21,200y = 0,81995$ |
| $x + 25,633y = 0,51208$ |
| $\frac{4,433}{0,9213}$ |
| $y = 0,0208$ |

| |
|---------|
| 0,90309 |
| 2,22943 |
| 0,52029 |
| 2,22943 |
| 3,65823 |
| 1,93877 |
| 0,64572 |
| 4,96440 |

Fig. A.1 – Calcolo di una regressione lineare per mezzo dei minimi quadrati. (Milano, 10 agosto 1825).

Dopodichè l'autore procede ad una seconda regressione lineare, per tener conto della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori, come espressamente scritto. Lo svolgimento è un po' meno facilmente leggibile, anche e forse soprattutto, per la mancanza di qualche tabella numerica, riassuntiva di alcuni passaggi, ma il significato matematico dell'operazione è comunque inequivocabile.

In ogni caso, è innegabile la correttezza del punto d'arrivo dei calcoli eseguiti, costituito da una tabella a quattro colonne, frutto dell'interpolazione, secondo le regressioni lineari stimate, delle dilatazioni termiche dei metalli e delle leghe: ottone, ferro ed acciaio (usati per l'asta del pendolo), in funzione della temperatura ed indirettamente della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori.⁴²

⁴² Le tabelle, appena presentate, sono a testimonianza del percorso d'eccellenza, compiuto dagli astronomi, geodeti e cartografi della Specola di Brera, ed a sostegno di quanto ancora oggi si continua a studiare, nella Scuola di Milano, nell'ambito del trattamento delle osservazioni, sulla scorta anche di così importanti inizi che, fra l'altro, possono annoverare Boscovich e la formalizzazione matematica del metodo della minima somma dei moduli, di derivazione galileiana.

- Dopo Carlini, per primo Schiaparelli, suo immediato successore, nella direzione della Specola di Milano e professore di Geodesia nel neonato Politecnico di Milano, nelle sue opere ponderose, scrive del metodo dei minimi quadrati, passando dall'utilizzo a scopo di ricerca, alla divulgazione alta, anche a scopo didattico.
- Dopodiché all'inizio del '900, su indicazione di Celoria, successore dello Schiaparelli, nella direzione della Specola di Milano e professore di Geodesia nel Politecnico di Milano, è attivato il primo corso di Teoria degli Errori.
- Questo corso è proseguito da Gino Cassinis e, ad esso (immediato predecessore dell'odierno corso di Trattamento delle Osservazioni), fa poi seguito il corso di Teoria e Pratica delle Misure, tenuto da Cunietti e dalla signora Giovanna Togliatti.

Non stupisca invece il non-uso dei minimi quadrati nella compensazioni delle reti, da parte di Carlini e di Cesaris, (ovvero Angelo De Cesaris) ed Oriani che lo hanno preceduto. Infatti:

- in date antecedenti il 1804 (a loro volta, precedenti le prime presentazioni del metodo, da parte di Legendre e Gauss), quando il governo napoleonico intima, agli astronomi di Brera, l'interruzione di tutte le operazioni geodetiche in Lombardia (ad eccezione del controllo della stabilità dei capisaldi),
- l'enorme volume di calcoli, necessari per eseguire le compensazioni delle reti geodetiche, ed un mondo ancora completamente privo di sussidi di calcolo, ad eccezione delle tavole dei logaritmi, sono una giustificazione pienamente sufficiente, a riguardo.

riunendo in un solo le osservate dilatazioni relative, e prendendo
i medii si ha per la differenza fra il metro napoletano e il metro
di ottone.

| T | O-M | | | | |
|------------|--------|------------------|--------|-------|--------|
| + 2,90 | 0,0000 | 7,10 | 0,0415 | 19,52 | 0,1383 |
| 2,80 | 0,0223 | 7,48 | 0,0521 | 23,50 | 0,1694 |
| 3,22 | 0,0174 | 8,12 | 0,0332 | 19,30 | 0,1103 |
| 5,41 | 0,0083 | 12,92 | 0,0647 | 19,60 | 0,1139 |
| 5,79 | 0,0167 | 13,03 | 0,0791 | | |
| med + 4,02 | 0,0149 | 10,70 | 0,0541 | 20,48 | 0,1330 |

Supposto $O-M = x + y \cdot T$ si hanno le 2 e equazioni

$$x + 4,02 \cdot y = 0,0149$$

$$x + 9,73 \cdot y = 0,0541$$

$$x + 20,48 \cdot y = 0,1330,$$

che risolve con i minimi quadrati Gauss.

Le osservazioni relative al metro di ferro danno

$$x + 4,02 \cdot y = + 0,1180 +$$

$$x + 9,73 \cdot y = - 0,1219$$

$$x + 20,48 \cdot y = - 0,1354$$

$$3x + 34,23 \cdot y = - 0,3413$$

$$34,23x + 520,07 \cdot y = + 4,5892$$

$$F - M = - 0,0009 = 0,0017 \cdot T$$

$$F - M = - 0,1098 = 0,0013 \cdot T$$

Quelle relative al metro di acciaio

$$x + 4,02 \cdot y = + 0,1170$$

$$x + 9,73 \cdot y = + 0,1015$$

$$x + 20,48 \cdot y = + 0,0960$$

$$3x + 34,23 \cdot y = + 0,3107$$

$$34,23x + 520,07 \cdot y = + 3,4186$$

$$A - M = + 0,1138 - 0,0009 \cdot T$$

Fig. A.2 – Calcolo di una regressione lineare (delle dilatazioni termiche rilevate per i metalli e le leghe: ottone, ferro ed acciaio, in funzione della temperatura misurata) con il metodo dei minimi quadrati: stima dei coefficienti della regressione lineare.

Abbiamo dunque

$$O-M = -0,0114 + 0,0072 \cdot T^2$$

$$F-M = -0,1094 + 0,0013 \cdot T$$

$$A-M = +0,1134 - 0,0009 \cdot T$$

siano le dilatazioni ripetute di O F A M per un grado μ di t. f. a m

Le prime tre sono state determinate immediatamente e

trovate una volta di 0,0226, 0,0150, 0,0134

un'altra volta di 0,0208, 0,0130, 0,0127

il valore di m secondo Borda sarebbe = 0,01445

avremo perciò le seguenti equazioni

$$o = 0,0226 \quad \text{da ripetersi coi numeri quadrati.}$$

$$o = 0,0208$$

$$f = 0,0150$$

$$f = 0,0130$$

$$a = 0,0134$$

$$a = 0,0127$$

$$m = 0,01445$$

$$o-m = 0,0072$$

$$f-m = 0,0013$$

$$a-m = -0,0009$$

| | | | |
|-----|-----|-----|---------------|
| 226 | 150 | 134 | m = 0,01445 |
| 208 | 130 | 127 | m-o = -0,0072 |
| 22 | 780 | 268 | m-f = 0,0013 |
| 506 | -13 | 9 | m-a = +0,0009 |
| | 162 | 152 | + 301445 = |

| | | |
|------------------|--------------|--------------|
| 30-m = 0,0506 | 0,0655 | o = 0,0218 |
| 27-m = 0,0207 | 0,0416 | f = 0,0132 |
| 3a-m = 0,0252 | 0,0201 | a = 0,0134 |
| 4m-5 = 0,01045 | | |
| -3m+35 = 0,1025 | | |
| 12m-35 = 0,09135 | | |
| 9m = 0,09385 | m = 0,01487 | 3m = 0,04461 |
| 43 | 4m = 0,05948 | 25 = 0,1025 |
| 78 | 0,01045 | 35 = 0,1471 |
| 65 | 5 = 0,04903 | 5 = 0,04903 |

Fig. A.3 – Sviluppi del calcolo della regressione lineare, per tener conto della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori. (secondo Borda, cfr. scritto riportato).

$$M = 1000,0004 + 0,01487 \cdot T$$

$$O = 999,9858 + 0,0218 \cdot T$$

$$F = 999,890 + 0,0139 \cdot T$$

$$A = 1000,114 + 0,0134 \cdot T$$

| | O | A | F |
|------|-------|-------|-------|
| 16,0 | 0,334 | 0,328 | 0,112 |
| 16,1 | 0,338 | 0,330 | 0,114 |
| 16,2 | 0,338 | 0,331 | 0,115 |
| 16,3 | 0,340 | 0,332 | 0,117 |
| 16,4 | 0,343 | 0,335 | 0,118 |
| 16,5 | 0,345 | 0,335 | 0,119 |
| 16,6 | 0,347 | 0,336 | 0,121 |
| 16,7 | 0,349 | 0,338 | 0,122 |
| 16,8 | 0,351 | 0,339 | 0,124 |
| 16,9 | 0,353 | 0,340 | 0,125 |
| 17,0 | 0,356 | 0,342 | 0,126 |
| 17,1 | 0,358 | 0,343 | 0,128 |
| 17,2 | 0,360 | 0,344 | 0,129 |
| 17,3 | 0,362 | 0,346 | 0,130 |
| 17,4 | 0,364 | 0,347 | 0,132 |
| 17,5 | 0,366 | 0,348 | 0,133 |
| 17,6 | 0,369 | 0,350 | 0,135 |
| 17,7 | 0,371 | 0,351 | 0,136 |
| 17,8 | 0,373 | 0,353 | 0,137 |
| 17,9 | 0,375 | 0,354 | 0,139 |

| | O | A | F |
|------|-------|-------|-------|
| 18,0 | 0,377 | 0,355 | 0,140 |
| 18,1 | 0,380 | 0,357 | 0,142 |
| 18,2 | 0,382 | 0,359 | 0,143 |
| 18,3 | 0,384 | 0,360 | 0,144 |
| 18,4 | 0,386 | 0,362 | 0,146 |
| 18,5 | 0,388 | 0,363 | 0,147 |
| 18,6 | 0,390 | 0,363 | 0,149 |
| 18,7 | 0,393 | 0,365 | 0,150 |
| 18,8 | 0,395 | 0,366 | 0,151 |
| 18,9 | 0,397 | 0,367 | 0,153 |
| 19,0 | 0,399 | 0,369 | 0,154 |
| 19,1 | 0,401 | 0,370 | 0,155 |
| 19,2 | 0,404 | 0,371 | 0,157 |
| 19,3 | 0,406 | 0,373 | 0,158 |
| 19,4 | 0,406 | 0,374 | 0,160 |
| 19,5 | 0,410 | 0,375 | 0,161 |
| 19,6 | 0,412 | 0,377 | 0,162 |
| 19,7 | 0,414 | 0,378 | 0,164 |
| 19,8 | 0,417 | 0,379 | 0,165 |
| 19,9 | 0,419 | 0,381 | 0,167 |
| 20,0 | 0,421 | 0,382 | 0,168 |

Fig. A.4 – Interpolazione, secondo le regressioni lineari stimate, delle dilatazioni termiche dei metalli e delle leghe: ottone, ferro ed acciaio, in funzione della temperatura e della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- A. Bordoni, *Geodesia elementare*. Tipografia degli Eredi Bizzoni, Pavia, 1859.
- F. Schiavoni, *Principi di Geodesia*. Stabilimento tipografico dell'Unione, Napoli, 1880.
- E. Pucci, *Fondamenti di Geodesia*. Vol. I e II. Ulrico Hoepli, Milano, 1883.
- N. Jadanza, *Elementi di Geodesia*. Tip. lit. CV. Giorgis, Torino, 1895.
- V. Reina, *Corso di Geodesia*. A cura di C. De Caroli e D. Benedetti. Università degli Studi di Roma – La Sapienza, Roma, 1901.
- G. Ciconetti, *Geodesia e Topografia*. Stabilimento tipo-litografico del Genio Civile, Roma, 1927.
- P. Pizzetti, *Trattato di Geodesia teoretica*. Nicola Zanichelli, Bologna, 1928.
- G. Cassinis, *Lezioni di Topografia con elementi di Geodesia*. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano, 1938.
- G. Boaga, *Elementi di Geodesia e Topografia*. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova, 1943.
- G. Cassinis, *Complementi di Topografia e Geodesia*. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano, 1955.
- L. Solaini, *Topografia*. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano, 1956.
- A. Marussi, *Corso di Geodesia*. Università degli Studi di Trieste, Trieste, 1957.
- P. Dore, *Geodesia e Topografia*. Casa Editrice del Prof. Riccardo Pàdron, Bologna, 1960.
- C.F. Aquilina, *Lezioni di topografia*. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova, 1963.
- C. Mazzon, *Lezioni di Geodesia*. Istituto Idrografico della Marina, Genova, 1970.
- G. Inghilleri, *Topografia Generale*. UTET, Torino, 1974.
- M. Cunietti, *Le misure e il loro trattamento*. CLUP, Milano, 1977.
- G. Birardi, *Corso di Topografia*. Pitagora Editrice, Bologna, 1978.
- G. Folloni, *Principi di Topografia*. Ed. Patron, Bologna, 1982.
- V. Tomelleri *et al.*, *Algoritmi Topografici Unificati*. Edizioni Metria, Padova, 1991.